Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula?

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

27 julho 2019

1

Introdução

Um dos grandes objetivos do ensino da Matemática é desenvolver a capacidade de raciocinar.

- O que é raciocinar?
- Quais os aspetos fundamentais da capacidade de raciocínio?
- De que modo pode o professor na sala de aula promover o seu desenvolvimento?

São questões que irei analisar conjugando perspetivas teóricas e exemplos concretos.

2

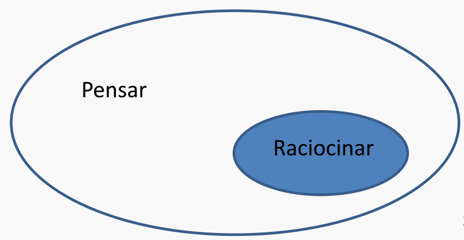
Raciocínio

Raciocinar: 1. fazer uso da razão para depreender, julgar ou compreender; 2. encadear pensamentos de forma lógica; 3. apresentar razões; 4. ponderar; reflectir; pensar (Do lat. *ratiocinári*) (Dicionário Porto Editora)

Fazer inferências de forma justificada, ou seja, obter nova informação a partir de informação dada.

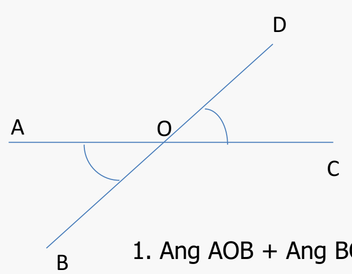
Tipos de raciocínio:

- Dedutivo,
- Indutivo,
- Abdutivo.



Raciocínio dedutivo

- **Dois ângulos verticalmente opostos são iguais.**



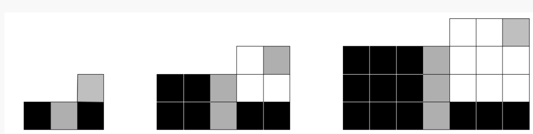
1. Ang AOB + Ang BOC = Ang Raso (por construção)
2. Ang DOC + Ang BOC = Ang Raso (por construção)
3. Ang AOB + Ang BOC = Ang DOC + Ang BOC (duas quantidades iguais a uma terceira são iguais entre si)
4. Ang AOB = Ang DOC (subtraindo a mesma quantidade a ambos os membros de uma igualdade obtém-se uma nova igualdade)

Raciocínio dedutivo

- É característico da Matemática, onde ocupa um lugar fundamental.
  - Constitui, "o elemento estruturante, por excelência, do conhecimento matemático" (**Oliveira, 2002, p. 178**).
- É desenvolvido do geral para o particular, com uma conclusão necessária.
  - Desde que a cadeia de deduções esteja isenta de erros, "o raciocínio dedutivo produz conclusões que são necessariamente válidas" (**Oliveira, 2008, p. 7**).
- Assume a forma de demonstração: "raciocinar dedutivamente envolve sobretudo encadear asserções de forma lógica e justificar esse encadeamento" (**Ponte, Branco e Matos, 2008, p. 89**).
- Tem principalmente o papel de validação de conhecimento.

5

Raciocínio indutivo



1 2 3 … *n*

1. O quarto termo quantos quadrados negros tem?
2. E o termo de ordem n, quantos quadrados negros tem?

$$\mathbf{n^2+n}$$

6

Raciocínio indutivo e abdutivo

- A indução é a inferência de uma regra a partir da observação do que é constante em diversos casos particulares. **(George Pólya, 1954)**
- A abdução é um processo de inferência que parte de um facto insólito ou invulgar e que procura uma explicação para a sua ocorrência.
- "A abdução, ao fim e ao cabo, não é senão conjetura… é o processo de escolher uma hipótese". **(Charles Peirce, 1839-1914)**

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2009). Algebraic reasoning through patterns: Findings, insights, and issues drawn from a three-year study on patterns are intended to help teach prealgebra and algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School, 15(4), 213-221.*

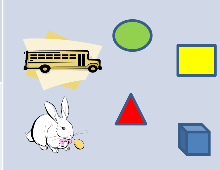
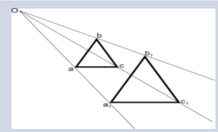
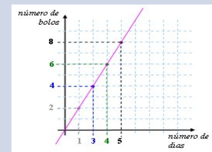
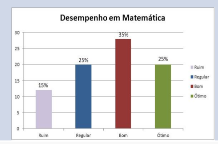
Silva, A. P. (2009). A problemática da descoberta e da prova. *Educação e Matemática, 101, 37-41.*

Representações

Suporte para raciocinar e para comunicar o raciocínio

- As representações assumem um papel decisivo na aprendizagem: "quando os alunos conseguem aceder às representações matemáticas e às ideias que elas expressam, ficam com um conjunto de ferramentas que aumentam significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente" (NCTM, 2007, p. 75).
- É impossível aceder directamente ao raciocínio matemático dos alunos—para o conhecer é necessário que estes o comuniquem, através de diferentes representações.
- Trabalhar com diferente representações: "as representações matemáticas desempenham um papel importante em toda a aprendizagem desta disciplina, e o trabalho com os conceitos matemáticos mais importantes deve envolver, sempre que possível, mais do que uma forma de representação" (ME, 2007, p. 9).

Representações
(Bruner, Goldin, Duval)

Representações (externas) básicas	Exemplos		Representações mistas
Ativas	Objetos		
Icónicas	Figuras (representações pictóricas)		
Simbólicas	Linguagem verbal	Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma do quadrado dos catetos…	
	Símbolos matemáticos	**1, 3, +, x, ≤,√, ∞, ∫, β…**	

Que lugar para os diferentes tipos de raciocínio?

- Dedutivo
- Indutivo
- Abdutivo

10

Raciocínio - Modelo 1

- Ideia central: Raciocinar matematicamente é um processo dinâmico que envolve conjeturar, generalizar, investigar porquê e desenvolver a avaliar argumentos.

Conjeturar e generalizar (1-4)

Investigar porquê (5)

Justificar ou refutar (6-9)

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning: Pre-K-Grade 8. Reston, VA: NCTM.*

11

Raciocínio – Modelo 2

Significar
("Sense making")

Indução e Abdução

Dedução

RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Formular questões (específicas ou gerais)

Formular estratégias de resolução

Formular conjeturas específicas

Generalizar

Aplicar as estratégias

Testar

Fazer cálculos, usar definições e propriedades matemáticas

Justificar (Informal e formalmente)

Representar

Linguagem natural, pictórica, algébrica, geométrica, estatística…

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2012). Raciocínio matemático em conjuntos numéricos: Uma investigação no 3.º ciclo. *Quadrante, 21(2), 81-110.*

12

Tarefa 2 - Equivalência de frações (10 anos)

Inês: Isto aqui é uma justificação.
…
Tânia: Mas depois na outra já têm aqui uma generalizaçãozinha.
…
Tânia: Já não é para todos.
Joana: Exatamente.

5.
a) Será que $\frac{2}{4}=\frac{8}{16}$? $\frac{2}{4}=\frac{8}{16}$?

Sim.

0,5=0,5.

b) Dá uma (ou mais) justificações para a tua resposta à pergunta anterior.

$\frac{2}{4}=0{,}5$ $\frac{8}{16}=0{,}5$

$0{,}5=0{,}5$

Um número a dividir pelo seu dobro é igual a 0,5.

13

Tarefa 3 - Comparação de frações (10 anos)

Dadas duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, se $a > c$ e $b > d$

Será que $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$?

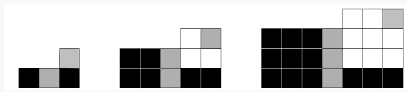
Não. Porque o exemplo de $7:4=1{,}75$ e o $5:2=2{,}5$ $1{,}75 < 2{,}5$ é de que isso não é verdade.

Tânia: É mais uma justificação, ele vai arranjar um [contra-]exemplo.

Não é verdade, porque podemos ter $\frac{5}{5}$ e $\frac{3}{3}$. O numerador e o denominador podem ser maiores por exemplo: $\frac{5}{5}=\frac{3}{3}$ e $\frac{7}{7}=\frac{4}{4}$. Mas o resultado é igual.

14

Tarefa 4 - Sequências (13 anos)



Mostra que a diferença entre o número de quadrados pretos e o número de quadrados brancos é igual ao número de quadrados cinzentos.

na figura 2, se adicionarmos os □ pretos você dar 6, ou seja, metade de 6 é 3, que é o nº de quadrados cinzentos.

quadrados pretos $= n^2 + n$

quadrados brancos $= n^2 - 1$

quadrados cinzentos $=$ ~~n+2~~ $n+1$

$5^2 + 5 = 30$

$5^2 - 1 = 24$

$5 + 1 = 6$

$30 - 24 = 6$

- Conta os quadrados pretos da fig. 2 (que são 6), mas não se percebe porque determina metade (justificação incorreta).
- Identifica os 3 termos gerais, mas não faz a diferença entre os termos gerais que interessam.
- Mostra que a afirmação é verdadeira, apresentando apenas um exemplo. (justifica com um caso)

Tarefa 4 - Sequências

4. Observa a seguinte sequência:

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

a. Mostra que a diferença entre o número de quadrados pretos e o número de quadrados brancos é igual ao número de quadrados cinzentos.

Fig 1 diferença $= 2-0=2$

Figura 2 diferença $= 6-3=3$

Figura 3 diferença $= 12-8=4$

m^2+m

m^2-1

$m+1$

$(m^2+m)-(m^2-1) = m+1$

$m^2+m-m^2+1 = m+1$

$m+1 = m+1$

Fig. 1 diferença = 2-0=2
Figura 2 diferença = 6-3=3
Figura 3 diferença 12-8=4

- Faz as diferenças para as três figuras.
- Determina os termos gerais.
- Faz uma verificação algébrica da igualdade pedida.

Aula em três fases

1 2 3

1. Introdução da tarefa (promovendo o envolvimento dos alunos).
2. Trabalho autónomo dos alunos (pares, grupos, individual).
3. Discussão coletiva (apresentação e confronto de resoluções, síntese final).

17

Tarefa 5 - Equações

A Catarina, o Ricardo e a Inês fizeram um registo idêntico ao dos colegas e o crescimento das suas plantas pode ser representado pelas seguintes funções:

Planta da Catarina: $c(x) = 0.6x + 2$
Planta do Ricardo: $r(x) = 2 + \frac{3}{5}x$
Planta da Inês: $i(x) = 1 + 0.6x$

a. Em que dia é que a planta da Catarina tem a mesma altura que a do Ricardo? E do que a da Inês?

b. Atendendo aos resultados obtidos na questão anterior, que relação existirá entre os gráficos das funções c e r? E das funções c e i?

18

Discussão coletiva

Professora: Porque é que têm de ser duas retas paralelas?

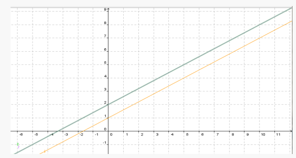
Vasco: Porque o da Catarina e do Ricardo começaram com dois centímetros de altura e vão sempre acrescentar e depois a da Inês começou com um centímetro de altura e a somar.

J

Professora: E só há... Há outra hipótese das retas não se intersetarem sem serem paralelas?

Vários alunos: Não.

Professora: Não, então, graficamente, nós temos isto.



...

Professora: E ainda quero que o Vasco partilhe connosco aqui uma coisa que observou muito interessante.

Vasco: Como a Catarina e o Ricardo começaram com a mesma altura e como ambas as plantas crescem ao mesmo ritmo, não se vão cruzar, a da Inês como cresce todos os dias...

C

Professora: Não se vão cruzar, estas aqui?!

Vasco: Sim. Então, já estão cruzadas.

Professora: Ah, já estão sobrepostas, coincidentes. E estas duas?

R

Vasco: A da Inês, como todos os dias cresce a mesma altura das restantes e começou com menos um centímetro... Vai ficar sempre mais pequena.

Professora: Vai ficar sempre mais pequena, daí que nunca se intersete. Exatamente, exatamente.

Abordagem exploratória - 1

Os **alunos**

- Trabalham em **tarefas** para as quais não têm um método de resolução imediato – para as resolver têm de construir os seus próprios métodos, usando conhecimentos prévios.
- Têm oportunidades para construir ou aprofundar a sua compreensão de conceitos, procedimentos, representações e ideias matemáticas.
- Assumem um papel ativo na interpretação das questões, na representação da informação apresentada e na conceção e concretização de estratégias de resolução.
- São chamados a apresentar e justificar os seus raciocínios.

O **professor**

- Em lugar de ensinar diretamente procedimentos e algoritmos, mostrando exemplos e propondo exercícios para praticar,
- ... Propõe aos alunos um trabalho de descoberta, e promove momentos de negociação de significados, argumentação e discussão coletiva.

Abordagem exploratória - 2

- A abordagem exploratória tem dois suportes principais:
  - a escolha de **tarefas** apropriadas, suscetíveis de promover a construção de conceitos, a formulação de estratégias de resolução de problemas, conjeturas e justificações.
  - o estabelecimento de um ambiente de **comunicação na sala de aula** capaz de favorecer a participação e reflexão por parte dos alunos, com relevo para os momentos de discussão coletiva.
- Esta abordagem enfatiza a construção de conceitos, a modelação de situações e também a utilização de definições e propriedades de objetos matemáticos para fazerem raciocínios – generalizar e justificar.
- Presta atenção aos **aspetos computacionais** da Matemática, mas valoriza os **aspetos concetuais** – ou seja, considera importante obter resultados, mas mais importante ainda perceber a estratégia geral que foi usada e a sua justificação.

Tarefas para o desenvolvimento do raciocínio

- Têm natureza diversa e com diferentes graus de desafio, com enfâse em tarefas que incluam questões exploratórias e/ou problemas.
- Incluem questões que permitam uma variedade de processos de resolução.
- Incluem questões que incitem a formulação de generalizações
- Incluem questões que solicitem a justificação de respostas ou processos de resolução.

Ações do professor para o desenvolvimento do raciocínio

- No trabalho autónomo:
  - Acompanhar a resolução da tarefa dando apenas as indicações necessárias, sem reduzir de modo significativo o desafio da tarefa,
- Na discussão coletiva
  - Encorajar a partilha de ideias nos momentos de discussão coletiva,
  - Explorar desacordos entre alunos, levando-os a argumentar as suas posições,
  - Aceitar e valorizar contribuições incorretas ou parciais, promovendo uma discussão que as desconstrua, complemente ou clarifique,
  - Solicitar aos alunos que identifiquem justificações válidas e inválidas, enfatizando o que as valida.

23

Ações do professor para o desenvolvimento do raciocínio

- Durante todo o trabalho
  - Solicitar a explicação do "porquê" e justificações alternativas tanto durante a resolução da tarefa como nos momentos de discussão coletiva,
  - Propor demonstrações sempre que estas forem pertinentes e adequadas aos conhecimentos dos alunos,
  - Desafiar os alunos a ir além da tarefa, quer pela formulação de novas questões quer pela formulação de generalizações.

24

Conclusão

- O raciocínio é uma capacidade transversal que, embora não exclusiva da Matemática, pode ser promovida de modo muito importante no trabalho em Matemática.
- Vertentes fundamentais do raciocínio em Matemática são as justificações (alicerce do raciocínio dedutivo) e as generalizações (obtidas na sua maioria de forma indutiva).
- O trabalho em torno do raciocínio matemático não é exclusivo das anos de escolaridade mais avançados – pode e deve começar nos primeiros anos.
- Dar maior visibilidade ao desenvolvimento do raciocínio matemático, através de uma **abordagem exploratória**, é um requisito fundamental para um ensino da Matemática com compreensão.

25